Skripte iz MA120

**1. Algebarske strukture sa jednom binarnom operacijom (grupoid, semigrupa, monoid, grupa, Abelova grupa).**

Skup G u kome je definisana jedna binarna operacija ∗ označavamo kao uređeni par (G, ∗) i nazivamo algebarska struktura sa jednom binarnom operacijom.

Uređeni par (G, ∗) je grupoid kada na bilo koja dva elementa iz skupa G možemo primeniti operaciju \* i dobiti element koji takođe pripada skupu G, tj.:

(∀ x, y ∈ G) x ∗ y ∈ G

Grupoid je:

1. grupoid sa jedinicom ako sadrži neutralni element e tako da, kada se primeni operacija \* na e i na bilo koji element iz skupa G, ponovo se dobija taj element: (∀ x ∈ G) x ∗ e = e ∗ x = x
2. komutativni grupoid ako nike bitan redosled elemenata nad kojima primenjujemo operaciju \*, tj. (∀ x, y ∈ G) x ∗ y = y ∗ x
3. asocijativni grupoid ili semigrupa ako redosled u kom se primenjuju operacije \* nije bitan, tj. (∀ x, y, z ∈ G) x ∗ (y ∗ z) = (x ∗ y) ∗ z

Grupoid može da ima inverzne elemente. Inverzni element nekog elementa x, zvan x’, je onaj koji, kada se operacija \* primeni na x i x’, kao rezultat daje neutralni element e, tj.:

(∀x ∈ G)(∃x′ ∈ G) x′ ∗ x = x ∗ x′ = e

(Primer: Operacija za množenje ⋅ ima neutralni element e = 1, jer bilo koji broj puta 1 je uvek taj isti broj. Redosled u kom se vrši množenje nije bitan. Inverzni element x’ će biti 1/x, jer x ⋅ 1/x = 1)

Monoid je semigrupa sa jedinicom.

Grupa je grupoid koji je asocijativan i sadrži neutralni element i inverzne elemente.

Abelova grupa je grupa koja je i komutativna.

**2. Algebarske strukture sa dve binarne operacije (poluprsten, prsten, polje).**

Algebarska struktura sa dve binarne operacije će da se označava sa + i ⋅ , gde je neutralni element za množenje 1 a za sabiranje 0.

Neprazan skup P ima dve definisane asocijativne binarne operacije + i ⋅ . Poluprsten je uređena trojka (P, +, ⋅) pod uslovom da važi:

(∀x, y, z ∈ P) x ⋅ (y + z) = x ⋅ y + x ⋅ z

Uređena trojka (P, +, ⋅) je prsten ako zadovoljava sledeća tri uslova:

1. (P, +) je Abelova grupa
2. (P, ⋅) je semigrupa
3. Važe levi i desni distributivni zakon:
   1. (∀x, y, z ∈ P) x ⋅ (y + z) = x ⋅ y + x ⋅ y (levi)
   2. (∀x, y, z ∈ P) (y + z) ⋅ x = y ⋅ x + y ⋅ x (desni)

Osobine prstena:

1. x ⋅ 0 = 0 ⋅ x = 0
2. (−x) ⋅ y = x ⋅ (−y) = −(x ⋅ y)
3. (−x) ⋅ (−y) = x ⋅ y, gde su (−x) i (−y) inverzni elementi elementima x i y u odnosu na operaciju +
4. 0 != 1 ako je (P, +, ⋅) netrivijalni prsten

Prsten (P, +, ⋅) je polje ako je (P ∖ {0}, ⋅) Abelova grupa.

**3. Pojam binarne relacije. Relacija ekvivalencije. Klase ekvivalencije.**

Binarna relacija predstavlja vezu ili odnos između odgovarajućih elemenata u određenim skupovima. Označava se sa ρ (“ro”). Ako element a ima relaciju sa elementom b, to se zapisuje kao aρb ili (a,b) ∈ ρ. Redosled zapisivanja je bitan jer a može imatu relaciju sa b ali b ne mora imati tu istu relaciju sa a.

Relacija može biti:

1. refleksivna ako element ima relaciju sama sa sobom,tj. (∀a ∈ A) a ρ a
2. simetrična, što znači da ako element a ima relaciju sa elementom b, b mora imatu tu istu relaciju sa a, tj. (∀a, b ∈ A) aρb ⇒ bρa
3. antisimetrična, što znači da a i b jedino imaju međusobnu relaciju kada su identični, (∀a, b ∈ A) aρb ∧ bρa ⇒ a = b
4. tranzitivna, što znači da ako a ima relaciju sa b i b ima relaciju sa c, a će potom imati istu tu relaciju sa c, tj. (∀a, b, c ∈ A) aρb ∧ bρc ⇒ aρc

Relacija ekvivalencije je relacija koja je refleksivna, simetrična i tranzitivna.

Klasa ekvivalencije je skup svih elemenata nekog skupa koji su u relaciji ekvivalencije sa nekim elementom. Neka je ρ relacija ekvivalencije u skupu A i neka je a ∈ A. Skup svih elemenata b ∈ A koji su u relaciji ρ sa elementom a se označava kao Ca.

Ca = {b|bρa}

Primer: Znak = je klasa ekvivalencije.

1. Refleksivnost: a = a
2. Simetričnost: a = b ⇒ b = a
3. Tranzitivnost: a = b ∧ b = c ⇒ a = c

**4. Pojam binarne relacije. Relacija poretka. Relacija strogog poretka.**

Binarna relacija predstavlja vezu ili odnos između odgovarajućih elemenata u određenim skupovima. Označava se sa ρ (“ro”). Ako element a ima relaciju sa elementom b, to se zapisuje kao aρb ili (a,b) ∈ ρ. Redosled zapisivanja je bitan jer a može imatu relaciju sa b ali b ne mora imati tu istu relaciju sa a.

Relacija može biti:

1. refleksivna ako element ima relaciju sama sa sobom,tj. (∀a ∈ A) a ρ a
2. simetrična, što znači da ako element a ima relaciju sa elementom b, b mora imatu tu istu relaciju sa a, tj. (∀a, b ∈ A) aρb ⇒ bρa
3. antisimetrična, što znači da a i b jedino imaju međusobnu relaciju kada su identični, (∀a, b ∈ A) aρb ∧ bρa ⇒ a = b
4. tranzitivna, što znači da ako a ima relaciju sa b i b ima relaciju sa c, a će potom imati istu tu relaciju sa c, tj. (∀a, b, c ∈ A) aρb ∧ bρc ⇒ aρc

Relacija poretka je relacija koja je tranzitivna, antisimetrična i refleksivna.

Relacija strogog poretka je relacija koja je refleksivna i antisimetrična.

Primer: Znak >= je relacija poretka.

1. Refleksivnost: a >= a
2. Antisimetričnost: a >= b ∧ b >= a ⇒ a = b
3. Tranzitivnost: a >= b ∧ b >= c ⇒ a >= c

**5. Relacijska funkcija – definicija funkcije. Injekcija, sirjekcija i bijekcija.**

Funkcija je pojam u matematici koji nam omogućava da procese i pojave iz stvarnog života opišemo matematičkim jezikom. Funkcija je, pre svega, binarna relacija.

Binarna relacija f ⊆ X × Y je funkcija ili preslikavanje skupa X u skup Y ako se svaki element x ∈ X pojavljuje tačno jedanput kao prva kooridinata u uređenim parovima skupa f. Drugim rečima, ako uređeni par (x, y1) i (x, y2) pripadaju skupu, to znači da y1 = y2 jer se element x sme javiti samo jedanput kao prva koordinata.

Skup X predstavlja domen funkcije, dok Y predstavlja kodomen funkcije.

Injekcija ili 1-1 preslikavanje znači da, ako su funkcije/preslikavanja dva elementa identična, ti elementi su isti, tj. (∀x1, x2 ∈ X) f(x1) = f(x2) ⇒ x1 = x2

Sirjekcija ili “na” preslikavanje znači da za svaki element iz kodomena postoji barem jedan element iz domena koji se na njega preslikava. (∀y ∈ Y )(∃x ∈ X) y = f(x)

Funkcija je bijekcija ako je injekcija i sirjekcija.

**6. Trigonometrijski oblik kompleksnog broja (množenje i deljenje kompleksnih brojeva zadatih u trigonometrijskom obliku, Muavrova formula, stepenovanje i korenovanje kompleksnog broja).**

Koristeći moduo i glavni argument kompleksnog broja, mi možemo iz algebarskog oblika z = x + iy u trigonometrijski oblik:

z = |z|(cosφ + i ∙ sinφ)

gde je |z| moduo kompleksnog broja z, a φ glavni argument kompleksnog broja z.

Množenje dva kompleksnog broja:

z1 ∙ z2 = ρ1 ∙ ρ2 ∙ (cos (φ1 + φ2) + i ∙ sin (φ1 + φ2))

Deljenje dva kompleksna broja:

z1/z2 = ρ1/ρ2 ∙ (cos (φ1 − φ2) + i ∙ sin (φ1 − φ2))

Muavrova formula se koristi za stepenovanje kompleksnih brojeva. Ona glasi:

z n = ρ n ⋅ (cos(nφ) + i ⋅ sin(nφ))

Korenovanje kompleksnog broja:



**7. Definicija polinoma nad poljem kompleksnih brojeva. Nula polinoma. Bezuov stav. Osnovni stav algebre. Faktorizacija polinoma.**

Polinom nad poljem kompleksnih brojeva je funkcija oblika:



gde su koeficijenti a0, a1,…, an−1, an nad poljem kompleksnih brojeva (C,+,⋅). Takav polinom se zove kompleksni polinom stepena n.

Nula polinoma predstavlja rešenje algebarske jednačine. To su vrednosti koeficijenata koji će odgovarajućem polinomu dati vrednost nula.

Osnovni stav algebra glasi da svaki kompleksni polinom stepena većeg ili jednakog od jedan, ima barem jednu nulu tj. ima barem jedno rešenje. Ovo znači da, ako je z0 nula polinoma Pn(z), tada je Pn(z) deljiv polinomom z − z0.

Faktorizacija polinoma Pn(Z) je formula:

**8. Definicija polinoma nad poljem realnih brojeva. Linearno-kvadratna faktorizacija. Racionalne nule realnog polinoma sa celobrojnim koeficijentima.**

Polinom nad poljem realnih brojeva je funkcija oblika:



gde su koeficijenti a0, a1,…, an−1, an nad poljem realnih brojeva (R, +, ⋅). Takav polinom se zove realni polinom stepena n.

Linearno-kvadratna faktorizacija polinoma je metoda za razlaganje polinoma na linearno-kvadratni oblik. To podrazumeva da se polinom faktorizuje u proizvod linearnih i kvadratnih faktora, odnosno u oblik (x-a)(x-b)(x-c)... gde su a, b, c itd. racionalne nule polinoma.

Racionalne nule polinoma su nule koje se mogu prikazati u obliku kore polinoma u kojima su koeficijenti racionalni brojevi. To znači da se one mogu prikazati kao omjer dva celih broja. Za određivanja racionalnih nula realnog polinoma Pn(x), mora važiti uslov da su svi koeficijenti a0, a1,…, an−1 celi brojevi.

Ako je neki razlomak p/q nula polinoma Pn(x), gde su p i q prosti brojevi, tada je p činilac slobodnog člana a0, a q je činilac koeficijenta an.

**9. Racionalne funkcije - Metod neodređenih koeficijenata.**

Racionalna funkcija je vrsta matematičke funkcije koja se može napisati kao odnos dva polinoma,(P(x)/Q(x), gde Q(x) ne sme biti jednak nuli. Oblast definisanosti racionalne funkcije je skup realnih brojeva koji nisu nule tog polinoma.

Nama su od posebnog značaja dve elementarne racionalne funkcije oblika:



**Primer:** Elementarna racionalna funkcija može biti f(k) = 2k / (k + 1), gde je A = k, dok je (x - a)j = k + 1. Ova funkcija se može zamisliti kao razlomak, gde je brojilac 2k, a imenilac k + 1. Ova funkcija je definisana za sve vrednosti k osim k = -1, pošto deljenje sa nulom nije dozvoljeno.

Da bi se racionalna funkcija predstavila u obliku elementarnih funkcija, potrebno je vršiti metodu neodređenih koeficijenata.

Data je racionalna funkcija Pm(x)/Qn(x), gde m i n predstavljaju stepene odgovarajućih polinoma. U slučaju da je m > n, onda se racionalna funkcija mora rastaviti na zbir celog broja i racionalne funkcije čiji je stepen niži od m.

Ako je n < m, može se primeniti metoda odmah. Naš cilj je da razložimo polinom Qn(x) na proizvod linearnih i kvadratnih faktora. Potom trebamo racionalnu funkciju razložiti na više elementarnih racionalnih funkcija. Imaćemo onoliko elementarnih racionalnih funkcija koliko imamo faktora, i svaka funkcija će imati jedan od tih faktora kao brojilac.

**Primer:** Funkciju f(x) = 2/(x2 − 1). Možemo razložiti (x2 − 1)na (x - 1)(x + 1). Ovaj polinom se može zapisati kao zbir elementarnih racionalnih funkcija:

Svođenjem na isti imenilac, dobijamo:

Izvlačenjem elementa x, dobijamo:

Time dobijamo da je: 

Gde možemo naći vrednosti A i B i zabeležiti ih u prvoj jednačini.

**10. Osobine determinanti. Minor i algebarski kofator. Laplasov stav i njegova posledica.**

Osobine determinante:

1. Vrednost determinante se ne menja ako se ona transponuje, tj. zamene se vrste sa kolonama
2. Determinanta je jednaka nuli ako su svi elementi vrste ili kolone jednaki nuli
3. Determinanta je jednaka nuli ako su dve vrste ili kolone u determinanti jednake ili ako su proporcionalne
4. Ako su svi elementi jedne vrste ili kolone proporcionalni, ne-nula faktor proporcionalnosti k se može izvući ispred determinante.
5. Ako dve vrste ili kolone zamene mesta, determinanta menja znak
6. Determinanta se množi nekim ne-nula faktorom k tako što se samo jedna vrsta ili samo jedna kolona te determinante pomnoži tim faktorom
7. Ako su svi elementi jedne vrste ili kolone neke determinante predstavljeni kao zbirovi dva sabirka, tada je ta determinanta jednaka zbiru dve determinante u kojima su elementi odgovarajućih vrsta ili kolona prvi, odnosno drugi sabirci
8. Vrednost determinante se ne menja ako se svakom elementu jedne vrste ili kolone dodaju elementi druge vrste ili kolone pomnoženi ne-nula faktorom

Minor determinante D koji je n-tog reda je determinanta (n-1)-og reda. Jedna determinanta ima n2 minora. Označava se sa Mij, gde je i broj vrste a j broj kolone matrice koje se oduzima iz determinante D. M11 je determinanta koja se dobija kada se uklone prva vrsta i kolona, na primer.

Algebarski kofaktor Aij se računa na osnovu odgovarajućeg minora Mij i elementa aij. Računa se kao:



Laplasov stav glasi da je vrednost determinante jednak zbiru proizvoda elemenata jedne vrste ili kolone odgovarajućih algebarskih kofaktora. Laplasov stav je primenjiv na determinante trećeg ili višeg reda.

**11. Operacije s matricama (množenje matrica skalarom, sabiranje i oduzimanje – definicije i osobine, transponovanje matrice, Množenje matrica – definicije i osobine).**

Skalar množi matricu tako što množi svaki element te matrice.

Jedino se mogu sabirati ili oduzimati matrice koje su istog tipa i njihov zbir tj. razlika će biti istog tipa kao matrice koje se sabiraju tj. oduzimaju.

Osobine sabiranja i oduzimanja matrica:

1. A + B = B + A
2. (A + B) + C = A + (B + C)
3. Struktura (Mm×n, +) je Abelova grupa
4. A + O = O + A = A
5. A + (−A) = (−A) + A = O

O je ne-nula matrica. Za dve matrice za koje važi A + B = O kažemo da su suprotne matrice.

Transponovanje matrice predstavlja zamenu vrsta matrica sa njenim odgovarajućim kolonama. Transponovana matrica se piše kao AT. Matrica tipa m x n postaje n x m prilikom transponovanja.

Osobine transponovanja:

1. (AT)T = A
2. (A + B)T = AT + BT
3. (α ⋅ A)T = α ⋅ AT

Dve matrice se mogu pomnožiti ako je broj kolona prve matrice jednak broju vrsta druge. Kao proizvod daju matricu koja ima broj vrsta prve i broj kolona matrice u tom proizvodu. Nazvaćemo prvu matricu, drugu matricu i rezultujuću matricu kao A, B, C, respektivno.

Da bi pronašli vrednost elementa u matrici C, uzimamo red matrice A i kolonu matrice B koji odgovaraju tom elementu u matrici C. Na primer, za element matrice c, c22, uzimamo drugu vrstu matrice A i drugu kolonu matrice B. Pomnožimo svaki element reda matrice A odgovarajućim elementom kolone matrice B. Saberemo dobijene proizvode, i taj zbir predstavlja vrednost elementa c22. Ponoviti postupak dok cela matrica C nije ispunjena.

Osobine množenja matrica:

1. (A ⋅ B) ⋅ C = A ⋅ (B ⋅ C)
2. A ⋅ (B + C) = A ⋅ B + A ⋅ C
3. (A + B) ⋅ C = A ⋅ C + B ⋅ C
4. O ⋅ A = A ⋅ O = O
5. α ⋅ (A ⋅ B) = (α ⋅ A) ⋅ B = A ⋅ (α ⋅ B)
6. (A ⋅ B)T = BT ⋅ AT
7. I ⋅ A = A ⋅ I = A

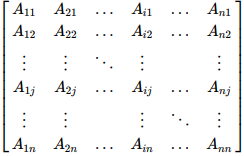
I je jedinična matrica. Ona je kvadratna matrica čiji su svi elementi nula osim glavne dijagonale, čiji su elementi jednaki jedan. On je proizvoljne veličine.

**12. Inverzna matrica (adjungovana matrica, određivanje inverzne matrice, jedinistvenost inverzne matrice i njene osobine).**

Za kvadratnu matricu A, matrica A-1 će biti njena inverzna matrica ako važi:



Adjugovana matrica matrice A se označava kao adj(A). Adjugovana matrica je istog tipa kao matrica, ali kao elemente sadrži sve algebarske kofaktore matrice A:



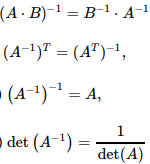
Inverzna matrica se računa pomoću formule



koja je jedino validna kada je det(A) različita od nule.

Jedinstvenost inverzne matrice glasi da svaka regularna matrica ima jedinstvenu inverznu matricu.

Osobine inverznih matrica:



**13. Rang matrice (definicija, osobine).**

Prirodan broj k je rang matrice A ako u matrici postoji barem jedan minor k-tog reda koji je različit od nule, dok su svi minori većeg reda od k jednaki nuli. Piše se kao r(A).

Ako je matrica pravougaona, tj. m != n, onda u njoj izdvajamo proizvoljnih k vrsta i k kolona, gde je k jednak m ili n (onom koji je manji), Elementi koji se nalaze u presecima izdvojenih vrsta i kolona čine kvadratnu matricu reda k. Ovo je submatrica, koja je kvadratna.

Ako je r(A) = k, onda se svaki ne-nula minor reda k zove bazisni minor. Vrste i kolone bazisnog minora su bazisne vrste i bazisne kolone.

Iz polazne matrice tipa m x n možemo izdvojiti 

broj submatrica.

Osobine ranga matrice:

1. Ako se matrica transponuje, rang matrice se ne menja;
2. Rang matrice se ne menja ako se dve vrste ili dve kolone zamene mesta;
3. Rang matrice se ne menja ako se svi elementi jedne vrste, ili kolone, pomnože jednim brojem različitim od nule;
4. Rang matrice se ne menja ako je se jednoj vrsti, odnosno koloni, dodaju odgovarajući elementi neke druge vrste ili kolone, pomnoženi jednim brojem;
5. Rang matrice se ne menja ako se iz nje izostavi vrsta, ili kolona, čiji su svi elementi jednaki nuli
6. Rang matrice se ne menja ako se iz nje izostavi vrsta, ili kolona, koja je linearna kombinacija drugih vrsta, odnosno kolona.

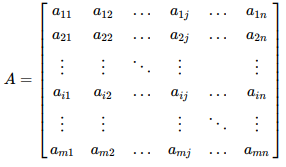
**14. Elementarne transformacije nad vrstama (kolonama) matrice. Postupak za određivanje ranga matrice primenom elementarnih transformacija. Stav o bazisnom minoru.**

Elementarne transofrmacije su određene operacije koje, kada se primenjuju na neku matricu, daju ekvivalentnu matricu sa istim rangom.

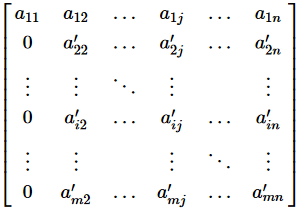
Podrazumevaju se sledeće transformacije:

1. zamena mesta dvema proizvoljnim vrstama ili kolonama;
2. dodavanje elemenata jedne vrste ili kolone, nekoj drugoj vrsti ili koloni, prethodno pomnožena nekim brojem;
3. množenje elemenata jedne vrste ili kolone brojem različitim od nule

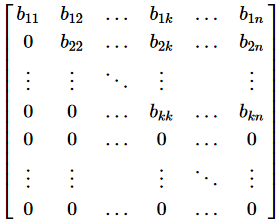
Putem elementarnih transformacija, mi neku matricu A možemo prevesti u ekvivalentnu matricu B.



Ovaj postupak se vrši tako što uzimamo prvi element u glavnoj dijagonali a11 i množimo ga sa odgovarajućim skalarima i dodajemo vrstama ispod prve tako da elementi ispod a11 budu jednaki nuli.



Potom uzimamo sledeći element u glavonj dijagonali, a22’ i radimo isto da pretvorimo sve elemente ispod a22’ u nule. Ovo nastavljamo dok ne dobijemo trougao nula. Pošto vrste/kolone nula ne menjaju rang matrice, mi možemo da ih ignorišemo pri računanju ranga matrice



Ova nova matrica ima isti rang kao originalna matrica, ali se lakše nalazi jer ne moramo da testiramo sve kombinacije brojeva kao u originalnoj matrici,

Stav o bazisnom minoru glasi da ako je rang neke matrice r , onda postoji tačno r linearno nezavisnih vrsta odnosno r linearno nezavisnih kolona te matrice, takvih da se sve ostale vrste/kolone te matrice mogu izraziti kao njihova linearna kombinacija.

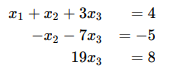
**15. Gausov metod eliminacije**

Gausov metod eliminacije je metod rešavanja sistema linearnih jednačina. To je korak-po-korak metod koji transformiše sistem jednačina u trouglasti oblik da bi se našle vrednosti nepoznatih.

Gausova metoda se radi tako što se vrše elementarne transformacije unutar sistema. Elementarna transformacija je neka operacija koja prevodi jedan sistem u drugi koji je njemu ekvivalentan. One su:

* Menjanje mesta dvema jednačina u sistemu
* Množenje jednačine sa nekim ne-nula brojem
* Dodavanje jedne jednačine drugoj jednačini
* Brisanje jednačine ako je identična drugoj jednačini u sistemu

Gausova metoda radi i sa kvadratnim i sa pravougaonim sistemima.

Kao rezultat se treba dobiti trouglasti oblik, gde svaka jednačina ima manji broj nepoznatih nego prošla, sve dok se ne dobije jednačina koja ima samo jednu nepoznatu (ili više jednačina sa po jednom nepoznatom), gde je potom lako izračunati njenu vrednost, kao ovde:

Potom se ta vrednost vraća u prošlu jednačinu, izračuna se druga nepoznata, koja se vraća u prošlu sve dok se ne nađu vrednosti svih nepoznatih.

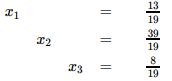
**16. Gausov metod – Žordanova shema za rešavanje sistema linearnih jednačina.**

Gaus-Žordanov metod je varijacija Gausove metode eliminacije. Ovo je takođe korak-po-korak metod koji putem elementarnih transformacija transformiše sistem u redukovani ešalonski oblik, kod kog je lako pronaći rešenje.

Gaus-Žordanova metoda radi i sa kvadratnim i sa pravougaonim sistemima.

U Gaus-Žordanovoj metodi, prvi korak je da se putem elementarnih transformacija oslobodimo prve promenljive x1 u svim jednačinama osim prve jednačine. Mi ovo radimo tako što množimo prvu jednačinu sa ne-nula brojevima i dodajemo svim ostalim jednačinama tako da prvi koeficijenti pored x1 budu jednaki nuli.

U drugom koraku, mi isti proces radimo sa drugom jednačinom. Pomnožimo jednačinu sa ne-nula brojevima i dodajemo svim ostalim jednačinama tako da su koeficijenti pored x2 jednaki nuli u svim sem druge jednačine.

Ovaj korak se nastavlja sa svim nepoznatim dok ne dobijemo sistem koji se sastoji od jednačina sa po jednom nepoznatom, kao ovde:

I time dobijamo vrednosti nepoznatih.

**17. Kroneker-Kapelijev stav i njegova primena na rešavanje sistema linearnih jednačina.**

Kroneker-Kapelijev stav je teorema koja se koristi da se proveri da li je neki sistem linearnih jednačina saglasan, tj. da li ima rešenja i potom da li ima jedinstveno rešenje.

On se primenjuje tako što se upoređuju rangovi matrice A i proširene matrice Ap, tj. upoređuju se r(A) i r(Ap). Sistem jednačina se zapisuje u oblik proširene matrice i putem elementarnih transformacija se napravi gornje-trouglasta matrica (matrica gde su svi elementi ispod glavne dijagonale jednake nuli).

Ovaj stav se može koristiti za rešavanje kvadratnih i pravougaonih sistema.

Pri upoređivanju r(A) i r(Ap), postoje tri mogućnoti:

* r(A) = r(Ap) = n, gde sistem ima jedinstveno rešenje
* r(A) = r(Ap) < n, gde je sistem neodređen
* r(A) != r(Ap), gde sistem nema rešenja

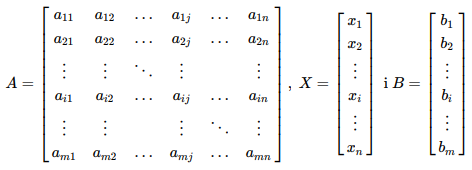
Nije moguće da r(A) i r(Ap) budu veći od n, tj. od broja nepoznatih u sistemu. Da jeste, to bi značilo da je rang matrice veći od same matrice, što nije moguće.

**18. Matrični metod za rešavanje sistema linearnih jednačina.**

Matrični metod za rešavanje sistema linearnih jednačina se primenjuje tako što se sistem jednačina prevodi u matrični oblik:

Matrica A je matrica tipa m\*n, gde m predstavlja broj jednačina a n predstavlja broj nepoznatih u sistemu. Ova matrica sadrži koeficijente tj. vezane članove kao elemente.

Matrica X je matrica-kolona (matrica sa jednom kolonom) tipa n\*1 koje sadrži nepoznate sistema.

Matrica B je matrica-kolona tipa m\*1 koja sadrži slobodne članove.

Proizvod matrica tipa m\*n i tipa n\*1 će zaista biti matrica m\*1.

Računa se vrednost determinante A. Samo ako je det(A) različito od nule moguće je odrediti inverznu matricu A-1. Matrični oblik se množi sleva inverznom matricom A da se dobije matrično rešenje:

Množenjem matrica A-1 i B dobijamo matricu X i samim time dobijamo vrednosti nepoznatih u sistemu.

Ova metod je primenljiva samo za kvadratne sisteme, tj. sisteme koji imaju jednak broj jednačina i nepoznatih.

**19. Kramerovo pravilo za rešavanje sistema linearnih jednačina.**

Kramerovo pravilo je metod rešavanja sistema jednačina koja se zasniva na matričnoj metodi, što znači da je jedino primenljiva na kvadratne sisteme.

Kao i kod matrične metode, sistem jednačina prevodi u matrični oblik:

Matrica A je matrica tipa m\*n, gde m predstavlja broj jednačina a n predstavlja broj nepoznatih u sistemu. Ova matrica sadrži koeficijente tj. vezane članove kao elemente.

Matrica X je matrica-kolona (matrica sa jednom kolonom) tipa n\*1 koje sadrži nepoznate sistema.

Matrica B je matrica-kolona tipa m\*1 koja sadrži slobodne članove.

Kramerovo pravilo se primenjuje tako što se izračuna vrednost determinante sistema det(A) (determinanta koja kao elemente sadrži koeficijente koje stoje uz nepoznate) označena sa D. Zatim se nađu vrednosti determinanata kod kojih je jedna kolona D zamenjena sa elementima iz matrice-kolone B, označene kao Dx, Dy, Dz, itd. Kod Dx se prva kolona menja, kod Dy druga kolona, Dz treća, itd.

Potom se nalaze vrednosti nepoznatih putem formula x = Dx/D, y = Dy/D, z = Dz/D, itd.

Postoje tri mogućnosti:

1. D != 0, u kom slučaju sistem ima jedinstveno rešenje
2. D = 0 i Dx = Dy = Dz = … = 0, u kom slučaju sistem je neodređen
3. D = 0 i barem jedno od Dx, Dy, Dz, itd. je ne-nula broj, u kom slučaju sistem nema rešenja

**20. Vektorski prostori (definicija)**

Vektorski prostor je uređeni par (S, X), gde je S polje (S,+,\*) koji sadrži skalare kao elemente i X je skup vektora.

Moraju biti ispunjena dva uslova da bi skup vektora bio vektorski prostor:

1. U skupu X je definisana operacija sabiranja + tako da je (X,+) Abelova grupa. Ovo znači da kada se dva vektora u skupu saberu, rezultat je će biti vektor koji je isto u tom skupu. Moraju važiti:
   1. x + y = y + x
   2. (x + y) + z = x + (y + z)
   3. x + O = x (postoji neutralni element za sabiranje O, tj. nula vektor)
   4. x + (−x) = O (svaki vektor ima inverzni vektor)
2. U polju S je definisana operacija množenja⋅koja uređenom paru (λ, x) ∈ S × X pridružuje element iz skupa X koji se označava kao λx. Ovo znači da kada se vektor u skupu pomnoži sa skalarom, rezultat će biti vektor koji je isto u tom skupu. Važe sledeće operacije:
   1. 1⋅x = x
   2. λ⋅(μ⋅x) = (λ⋅μ)⋅x
   3. λ⋅(x + y) = λ⋅x + λ⋅y
   4. (λ + μ)⋅x = λ⋅x + μ⋅x

**21. Linearna zavisnost i nezavisnost vektora. Baza i dimenzija vektorskog prostora.**

Linearna kombinacija vektora x1, ..., xn je vektor oblika:

gde su k1, …, kn skalari. Vektori x1, ..., xn su linearno zavisni ako je barem jedan skalar ne-nula broj i njihova linearna kombinacija jednaka nula vektoru:

Vektori su linearno nezavisni ako su svi skalari k1, …, kn jednaki nuli. Drugim rečima, vektori x1, ..., xn se ne mogu zapisati kao linearna kombinacija svih ostalih vektora u skupu.

Dimenzija vektorskog prostora (dimX) predstavlja broj linearno nezavisnih vektora u vektorskom prostoru. Dimenzija je skalarna vrednost i ne može biti negativna, nula ili necela.

Ako je dimenzija vektorskog prostora prirodan broj n, taj prostor je n-dimenzionalan. Ako vektorski prostor ima konačan broj linearno nezavisnih vektora, on je konačno dimenzionalan. U suprotnom je beskonačno dimenzionalan.

Za svaki n-dimenzionalni vektorski prostor X, skup vektora e1, …, en je njegova baza jedino ako su vektori e1, …, en linearno nezavisni. Broj elemenata baze je jednak njegovoj dimenziji.

Svaki vektor n-dimenzionalnog prostora se može zapisati kao linearna kombinacija vektora baze:

**Primer:** Skup vektora {(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)} je baza realnog vektorskog prostora jer su ova tri vektora linearno nezavisna. Bilo koji realan vektor se može zapisati pomoću vektora baze, npr. vektor (2,3,4) se može napisati kao linearna kombinacija 2(1,0,0) + 3(0,1,0) + 4(0,0,1).

**22. Linearni operator (definicija, transformacija vektorskih prostora, matrica linearnog operatora).**

Linearni operator predstavlja preslikavanje iz jednog vektorskog prostora u drugi. On poseduje dve osobine:

1. L(x + y) = L(x) + L(y) (aditivnost)
2. L(α⋅x) = α⋅L(x) (homogenost)

Iz ovih osobinh osobina se zaključuje treća osobina:

1. L(α⋅x + β⋅y) = α⋅L(x) + β⋅L(y)

Preslikavanje L je linearni operator ili homomorfizam jednog vektorskog prostora u drugi. Ako je L bijekcija, zove se izomorfizam jednog vektorskog prostora u drugi.

Transformacija iz jednog vektorskog prostora u drugi se vrši pomoću matrice linearnog operatora A. Linearni operator prima neki vektor x kao ulaz (zapisan kao matrica), i potom se množi sa linearnim operatorom da bi se dobila nova matrica koja predstavlja novi vektor.

**Primer:** Vektor (1,2) se zapiše kao matrica |1 2| i množi sa matricom linearnog operatora |3 0||0 4| tipa 2\*2. Kao rezultat vektorskog množenja se dobije |3 8|, što je vektor (3,8).

**23. Unitarni vektorski prostor. Normiran vektorski prostor. Metrika.**

Unitarni prostor je vektorski prostor u kom je definisan skalarni proizvod, tj. definisano je preslikavanje ⟨⋅, ⋅⟩ X × X ↦ R. Umesto ovih tačaka se upisuju vektori iz vektorskog prostora X i kao rezultat daju skalar koji je realan broj. Moraju važiti sledeće osobine:

1. ⟨x, x⟩ ≥ 0 (ne-negativnost)
2. ⟨x, x⟩ = 0 samo ako je x = 0 (ne-negativnost)
3. ⟨x, y⟩ = ⟨y, x⟩ (simetričnost)
4. ⟨λ⋅x, z + μ⋅y, z⟩ = λ⋅⟨x, z⟩ + μ⋅⟨y, z⟩ (linearnost)

Vektorski prostor je normiran vektorski prostor ako je svakom vektoru x pridružena norma ||x|| za koje važe osobine:

1. ||x|| ≥ 0 (ne-negativnost)
2. ||x|| = 0 ⇔ x = 0 (ne-negativnost)
3. ||α⋅x || = |α|⋅ ||x||
4. ||x + y|| ≤ ||x|| + ||y|| (nejednakost trougla)

Rastojanje ili metrika između dva vektora se računa kao d(x, y) = ||x − y||. Vektorski prostor u kome je moguće indukovati metriku je metrički prostor. Važe osobine:

1. d(x, y) ≥ 0
2. d(x, y) = 0 ako i samo ako je x = y
3. d(x, y) = d(y, x)
4. d(x, y) ≤ d(x, z) + d(z, y)

**24. Vektorski prostor ℝ**3**. Skalarni proizvod, norma i metrika u ℝ**3**. Operacije i relacije s vektorima u ℝ**3**.**

Skalarni proizvod dva vektora se računa kao suma proizvoda njihovih koordinata ⟨(x1,y1,z1), (x2,y2,z2)⟩ = x1⋅x2 + y1⋅y2+ z1⋅z2

tj.

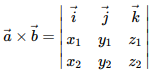
(x1,y1,z1) o (x2,y2,z2) = x1⋅x2 + y1⋅y2+ z1⋅z2, gde je “o” kružić tj. operacija skalarnog množenja.

Norma vektora ili intenzitet/dužina vektora unitarnog prostora je ne-negativan broj ||x||, koji se dobija kao rezultat sqrt(x12 + x22 + x32), tj. preslikavanje iz unitarnog prostora u skup realnih brojeva ||.|| : X ↦ R.

Rastojanje ili metrika između dva vektora se računa kao d(x1, x2) = ||x1 − x2||. Vektorski prostor u kome je moguće indukovati metriku je metrički prostor. Važe osobine:

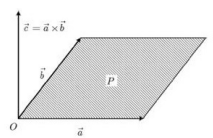
1. d(x1, x2) ≥ 0
2. d(x1, x2) = 0 ako i samo ako je x1 = x2
3. d(x1, x2) = d(x2, x1)
4. d(x1, x2) ≤ d(x1, x3) + d(x3, x2)

**25. Vektorski proizvod dva vektora u ℝ**3 **– definicija, osobine, primene.**

Vektorski proizvod se računa kao determinanta koja sadrži ortove i, j, k kao i koordinate vektora:

Vektorski proizvod daje vektor kao rezultat. Za novodobijeni vektor , važi sledeće:

1. |||| = ||||⋅||||⋅sin(∡(, )) = P, gde je P površina paralelograma konstruisanog nad vektorima i , kao u slici:



2. Vektor c će biti normalan na ravan koju određuju vektori i drugim rečima: ⊥ i ⊥ (na slici izgleda malo čudno, ali zamislite vektor kao flomaster koji stoji uspravno na stolu).

3. Vektori , i čine desni triedar.

Osobine vektorskog proizvoda:

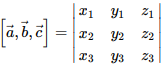
1. × = − × (antikomutativnost vektorskog proizvoda)

2. α⋅( × ) = (α⋅) × = × (α⋅) (asocijativnost)

3. × ( + ) = × + × (distributivnost)

4. × = 0 samo ako = λ (λ je ne-nula skalar, a i su ne-nula vektori)

**26. Mešoviti proizvod vektora u ℝ**3**– definicija, osobine, primene.**

Mešoviti proizvod tri vektora je skalar. Ako su uvedena tri vektora, mešoviti proizvod se računa kao determinanta njihovih koordinata:

Mešoviti proizvod je jedino jednak nula ako su vektori komplanarni (tj. da se vektori , i nalaze se u istoj ravni). Stoga se može koristiti da se proveri komplanarnost ili ne-komplanarnost grupe vektora.

**27. Jednačina ravni (opšti (skalarni) oblik, segmentni oblik). Jednačina ravni određena sa tri nekolinearne tačke. Rastojanje tačke do ravni.**

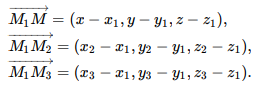
Neki vektor pripada ravni π. Vektor normale ravni je normalan i na vektor, što znači da je skalarni proizvod o = 0. Ako ove vektore preformulišemo pomoću njihovih koordinata, dobijamo (A, B, C) o (x − x0, y − y0, z − z0) = 0.

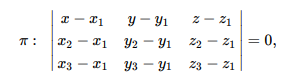
Primenjujući formulu za skalarni proizvod, dobijamo skalarnu jednačinu ravni π:

π : A(x − x0) + B(y − y0) + C(z − z0) = 0

Opšti oblik jednačine ravni π se dobija tako što se A⋅x0 + B⋅y0 + C⋅z0 zapišu kao slovo D:

π : Ax + By + Cz + D = 0

Kroz tri nekolinarne tačke se može postaviti tačno jedna ravan. Ako su date tačke M1(x1, y1, z1), M2(x2, y2, z2) i M3(x3, y3, z3) koje pripadaju ravni π, uzima se neka proizvoljna tačka M(x, y, z) da bi se formirali vektori:

Pošto ova tri vektora pripadaju istoj ravni, to znači da su komplanarni, što znači da je njihov mešoviti proizvod jednak nuli:

Da bi smo izračunali rastojanje neke tačke od ravni, moramo naći ortogonalnu projekciju te tačke na ravan. Pod ortogonalnom projekcijom se podrazumeva kada kroz tu tačku povučemo pravu koja je normalna na ravan. Tačka prodora je ortogonalna projekcija tačke na ravan. Rastojanje od tačke do tačke prodora se računa po formuli:



**28. Uzajamni odnos (položaj) dve ravni. Ugao između dve ravni. Pramen ravni.**

Za dve ravni, razlikujemo tri moguća odnosa:

1. Ravne su paralelne, tj. njihovi vektori normale su kolinearni ( = λ⋅ za ne-nula skalar λ) i njijov vektorski proizvod je jednak nula vektoru ( x = O). Iz ovoga važi:

1. Ravni se seku, tj. njihovi vektori normale nisu kolinarni (ne postoji ne-nula skalar λ da važi = λ⋅) i njihov vektorski proizvod je ne-nula vektor ( x != O). Iz ovoga važi:
2. Ravni se poklapaju ako su kolinearni i njihov vektorski proizvod je ne-nula vektor, pod uslov da važi:

Ako se ravni seku, ugao koji prave se nalazi preko kosinusa ugla između njihovih vektora normale. Formula glasi ∡(, ) = arccos(k(, )), gde k(, ) predstavlja:



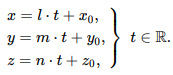
Date su dve ravni koje su zapisane u opštem obliku, π1 : A1⋅x + B1⋅y + C1⋅z + D1 = 0 i π2 : A2⋅x + B2⋅y + C2⋅z + D2 = 0. Ako se ove ravni seku, pramen ravni će da predstavlja jednačinu svih ravni (izuzev π1 i π2) koji će da prolaze kroz presečnu pravu. Formula glasi:

A1⋅x + B1⋅y + C1⋅z + D1 + λ⋅(A2⋅x + B2⋅y + C2⋅z + D2) = 0

**29. Jednačina prave (vektorski, kanonski, parametarski oblik). Jednačina prave kroz dve različite tačke. Rastojanje tačke do prave.**

Položaj prave p se može označiti sa jednom tačkom koja pripada toj ravni A(x0, y0, z0) i vektorom pravca prave (l, m, n). Uzmimo proizvoljnu tačku B(x, y, z) koja isto pripada pravi p. Time možemo da izračunamo vektor (x − x0, y − y0, z − z0).

Pošto su i kolinearni, vektorski proizvod ovih vektora je jednak nula vektoru. Ovime dobijamo vektorski oblik jednačine prave: x = O.

Pošto su ovi vektori kolinearni, to znači da važi = t⋅, gde je t ne-nula skalar. Ako vektore zamenimo sa njihovim koordinatama, možemo da preformulišemo jednačinu kao (x − x0, y − y0, z − z0) = (t⋅l, t⋅m, t⋅n). Pošto su vektori jedino jednaki ako su njihove koordinate jednake, možemo izvući:

Ovo je parametarski oblik jednačine. Izražavanjem skalara t iz svih ovih jednačina dobijamo:



Ovo je kanonski oblik jednačine.

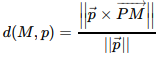
Jednačina prave u prostoru se može odrediti ako su poznate dve različite tačke kroz koje prava prolazi. Imamo tačke M1(x1, y1, z1) i M2(x2, y2, z2) koje pripadaju pravi. Ako uvedemo proizvoljnu tačku M(x0, y0, z0) koja takođe pripada pravi, onda možemo izračunati ova dva vektora:



Pošto su ovi vektori kolinearni, važi da je = t⋅, gde je t ne-nula skalar. Zamenom vektora sa njihovim vektorima, mi dobijamo:

što je jednačina prave kroz dve različite tačke.

Rastojanje tačke M od prave p se dobija tako što se prvo izrazi neka tačka na toj pravi, obeležena sa P, i vektor pravca . Potom se računa intenzitet/norma vektorskog proizvoda i i to se deli sa intenzitetom .



**30. Jednačina prave kao presek dve ravni.**

Imamo dve ravni koje se seku, π1 : A1∙x + B1∙y + C1∙z + D1 = 0 i π2 : A2∙x + B2∙y + C2∙z + D2 = 0 čiji su vektori normale = (A1, B1 , C1) i = (A2, B2 , C2). Ravni se seku i daju presečnu pravu samo ako važi uslov:

Vektor pravca prave (l, m, n) će biti kolinearna vektorskom proizvoda vektora normale ravni. = λ ∙ ( × ). Pošto je λ proizvoljan, mi možemo reći da je on jednak jedan, tako da ga kratimo iz jednačine i dobijamo = × .

Sada nam trebaju dve tačke koje se nalaze u pravi. Mi ovo radimo tako što jednu promenljivu u ravnima, npr. z, kao neki proizvoljni parametar t, t ∈ R. Dobijamo sistem linearnih jednačina i možemo izraziti x, y i z preko tog parametra t i dobiti parametarski oblik jednačine.

Parametarski oblik jednačine prevodimo u kanonski oblik jednačine prave.

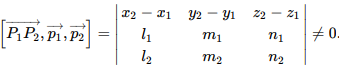
**31. Uzajamni položaj dve prave - mimoilazne prave. Najkraće rastojanje između dve mimoilazne prave.**

Date su dve prave:

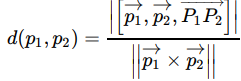


Iz ovoga dobijamo tačku u prvoj pravi P1(x1, y1, z1), vektor pravca prve prave (l1, m1, n1), tačku u drugoj pravi P2(x2, y2, z2) i vektor pravca druge prave (l2, m2, n2). Takođe možemo izračunati vektor (x2 − x1, y2 − y1, z2 − z1).

Kada su prave mimoilazne, to znači da nisu paralelne i da se ne seku, što znači da one ne mogu da odrede jednu ravan. To znači da vektori , , nisu komplanarni, što znači da njihov mešoviti proizvod mora biti različit od nule:



Prave jedino mogu biti paralelne ili da se seku ili da se poklapaju kada je mešoviti proizvod ovih vektora jednak nuli.

Najkraće rastojanje između mimoilaznih pravi je rastojanje između presečnih tačaka te normale ovih pravih i računa se po formuli:

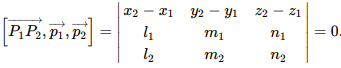
**32. Uzajamni položaj dve prave - prave se seku. Ugao koji zaklapaju dve prave koje se seku. Jednačina ravni određena presekom dve prave.**

Date su dve prave:



Iz ovoga dobijamo tačku u prvoj pravi P1(x1, y1, z1), vektor pravca prve prave (l1, m1, n1), tačku u drugoj pravi P2(x2, y2, z2) i vektor pravca druge prave (l2, m2, n2). Takođe možemo izračunati vektor (x2 − x1, y2 − y1, z2 − z1).

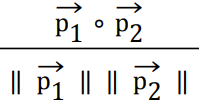
Prave se seku samo ako su vektori , , komplanarni, što znači da je njihov mešoviti proizvod jednak nuli:



Ovo znači da prave pripadaju istoj ravni. Da bi se prave sekle, i moraju biti nekolinarni, tj. da ne postoji ne-nula skalar λ tako da važi = λ⋅. Drugim rečima, mora da važi:



Ugao koji zaklapaju dve prave koje se seku se računa kao arccos(k(p1, p2)), gde k(p1, p2) predstavlja:



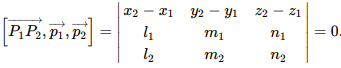
**33. Uzajamni položaj dve prave - paralelne prave i prave se poklapaju. Jednačina ravni određena dvema paralelnim pravama.**

Date su dve prave:



Iz ovoga dobijamo tačku u prvoj pravi P1(x1, y1, z1), vektor pravca prve prave (l1, m1, n1), tačku u drugoj pravi P2(x2, y2, z2) i vektor pravca druge prave (l2, m2, n2). Takođe možemo izračunati vektor (x2 − x1, y2 − y1, z2 − z1).

Prave su paralelne ili se poklapaju samo ako su vektori , , komplanarni, što znači da je njihov mešoviti proizvod jednak nuli:



Ovo znači da prave pripadaju istoj ravni. Da bi dve prave bile paralelne, i moraju biti kolinarni, tj. da postoji ne-nula skalar λ tako da važi = λ⋅. Drugim rečima, mora da važi:



Da bi se prave poklapale (prave koje se poklapaju su uvek paralelne), takođe mora da važi jedna od dveju jednačina:



Dve paralelne pravi određuju tačno jedan ravan. Mi možemo koristiti jednačinu ravni koja prolazi kroz tri nekolinearne tačke. Prva je tačka P1(x1, y1, z1) koja pripada prvoj pravi i druga je tačka P2(x2, y2, z2) koja pripada drugoj pravi. Treća tačka se nalazi tako što se jedna jednačina prevede na parametarski oblik.

**34. Uzajamni položaj prave i ravni. Ugao između prave i ravni.**

Date su prava p i ravan π:



Iz ovoga možemo naći tačku na pravi P(x0, y0, z0) vektor pravca prave = (l, m, n) i vektor normale ravni π, = (A, B, C).

Prava p je paralelna ravni π ako je vektor normale ravni π normalan na vektor pravca prave i ako nijedna tačka (što uključuje tačku P) sa prave p ne pripada ravni π. Drugim rečima:

o = 0 i P ∉ π.

Ako vektore zamenimo njihovim koordinatama, dobijamo (A, B, C) o (l, m, n) = 0, drugim rečima: A⋅l + B⋅m + C⋅n = 0. Ovo znači da su ravna i prava paralelne, ali ne mora da znači da prava leži u toj ravni.

Prava p se sarži ili leži u ravni samo ako takođe važi:

A⋅x0 + B⋅y0 + C⋅z0 + D = 0

Ravan koja sadrži pravu je uvek paralelna s njom. Ako je A⋅x0 + B⋅y0 + C⋅z0 + D != 0, onda su ravan i prava samo paralelne.

Prava p prodire ravan π ako vektor normale ravni π nije normalan na vektor pravca prave p. To znaći da o != 0. Zamenjujući s koordinatama i vršenjem skalarnog proizvoda, ovo znači da važi:

A⋅l + B⋅m + C⋅n != 0.

Ugao θ između ravne i pravi je ugao između prave i njene ortogonalne projekcije na ravan. Ovaj ugao će uvek biti manji od 90° jer se mora naći između vektora pravca prave i vektora normale . Stoga važi:



(Ne zaboraviti da je cos(π/2 – θ) isto što i cos(θ)!)

Zamenjujući s formulama za računanje skalarnog proizvoda i normi vektora, važi:



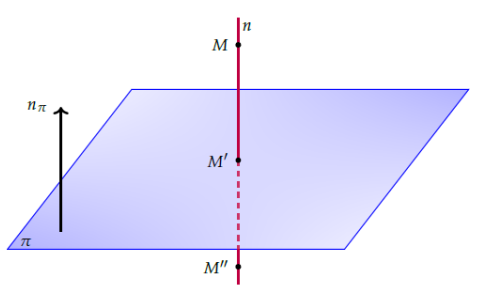
Ugao se potom dobija kao arccos(k), gde k predstavlja gornju formulu.

U slučaju da je prava ortogonalna na ravan π, tada su vektor pravca prave i vektor normale ravni kolinearni, što znači da je π/2 = θ. Tada važi da je:



**35. Ortogonalna projekcija date tačke u datu ravan. Simetrična tačka datoj u odnosu na datu ravan.**

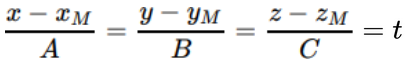
Ortogonalna projekcija je metoda poem koje se geometrijski objekti u prostoru predstavljaju odgovarajućom slikom u ravni. Tačka se ortogonalno (pod pravim uglom u odnosu na ravan) projektuje.



Date su tačka M(, , ) i ravan π : A⋅x + B⋅y + C⋅z + D = 0. Možemo nacrtati pravu n koja sadrži tačku M i ortogonalan je na ravan. Tačka M′ će biti tačka prodora ove prave.

**Korak 1:** Možemo naći vektor normale ravni = (A, B, C), koji je potom kolinearan sa vektorm pravca prave, . To znači da je = λ⋅, gde je λ neki ne-nula skalar.

**Korak 2:** Pošto je λ proizvoljan, mi možemo da kažemo da je on jednak 1, tako da je vektor pravca prave = (A, B, C). Pošto se tačka M nalazi na ovoj pravi, mi njene koordinate možemo da ubacimo u kanonski oblik prave:



**Korak 3:** Prevođenjem na parametarski oblik, mi dobijamo:

x = A⋅t +

y = B⋅t +

z = C⋅t +

Kada ovo ubacimo u jednačinu ravni, dobijamo:

π : A⋅(A⋅t + ) + B⋅(B⋅t + ) + C⋅(C⋅t + ) + D = 0

gde potom možemo naći vrednost za t. Mi potom vraćamo vrednost t u parametarski oblik prave da bi smo odredili (x, y, z), što su koordinate za prodornu tačku M’.

Tačka M’’, koja je simetrična tački M u odnosu na ravan, se nalazi na pravi n na istoj udaljenosti od ravni kao i tačka M. Drugim rečima, M’ je središte duži koje one formiraju. Ako zapišemo koordinate tačke M(, , ), središne tačke M’(, , ) a koordinate simetrične tačke M’’(, , ), dobijamo jednačine:

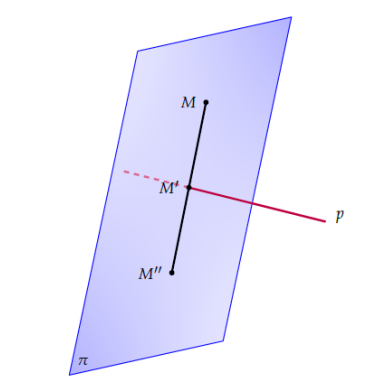
= 2⋅ −

= 2⋅ −

= 2⋅ −

**36. Ortogona**l**na projekcija tačke na pravu. Simetrična tačka datoj u odnosu na datu pravu.**

Ortogonalna projekcija tačke M u pravu p se dobija tako što se nacrta ravan koja je ortogonalna na pravu p i takođe sadrži tačku M.



Date su tačke M(, , ) i prava u kanonskom obliku:

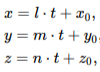
**Korak 1:** Vektor pravca prave je (l, m, n). Možemo naći vektor normale ravni koji je kolinearan sa vektorm pravca prave, , što znači da je = λ⋅. Pošto je λ proizvoljan, mi možemo da kažemo da je on jednak 1, tako da je vektor normale ravni = (l, m, n).

**Korak 2:** Pošto tačka M pripada ravni π, možemo je izračunati kao:

π : l⋅(x − ) + m⋅(y − ) + n⋅(z − ) = 0

Izračunati vrednost D = −(l⋅ + m⋅ + n⋅). Kada se vrednost izračuna, ubaciti je u formulu:

π : l⋅x + m⋅y + n⋅z + D = 0

**Korak 3:** Moramo naći vrednosti za (x, y, z) preko parametra t, što radimo tako što prevedemo jednačinu prave u parametarski oblik:

Ovo prebacujemo u jednačinu za ravan, gde dobijamo:

π : l⋅(l⋅t + x0) + m⋅(m⋅t+y0) + n⋅(n⋅t + z0) + D = 0

Odavde možemo izračunati vrednost t.

**Korak 4:** Novodobijenu vrednost t ubacujemo nazad u parametarski oblik jednačine da bi odredili (x, y, z), što će biti koordinate za projektnu tačku M’.

Tačka M’’, koja je simetrična tački M u odnosu na pravu p, je na istoj udaljenosti u ravni od prave kao i tačka M. Drugim rečima, M’ je središte duži koje one formiraju. Ako zapišemo koordinate tačke M(, , ), središne tačke M’(, , ) a koordinate simetrične tačke M’’(, , ), dobijamo jednačine:

= 2⋅ −

= 2⋅ −

= 2⋅ −

**37. Ortogonalna projekcija prave u ravan sa kojom je paralelna. Simetrična prava datoj pravi u odnosu na datu ravan. Ortogonalna projekcija prave u ravan koju prodire. Simetrična prava datoj pravi u odnosu na datu ravan.**

Ortogonalna projekcija prave u ravan je prava koja se dobija kao presek date ravni i ravni koja je na nju normalna, a u kojoj se data prava sadrži.

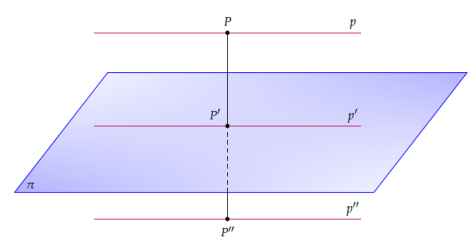
Date su ravan π : Ax + By + Cz + D = 0 i prava:



Odavde možemo naći tačku P(x0, y0, z0) koja se nalazi na pravi p, vektor pravca prave = (l, m, n) i vektor normale ravni = (A, B, C).

Prava je paralelna ravni π samo ako važi:

A ⋅ l + B ⋅ m + C ⋅ n = 0

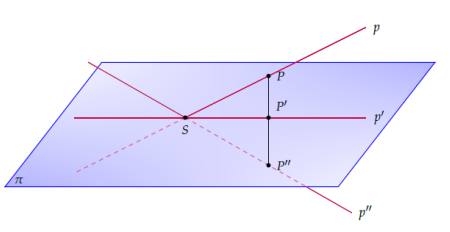


Ortogonalna projekcija p’ je paralelna sa pravom p, što znači da su njeni vektori pravaca identični. = (l, m, n). Da bi našli jednačinu prave p’, potrebna nam je ortogonalna projekcija tačke sa prave p na ravan, što je u ovom slučaju tačka P. Koordinate ortogonalne projekcije tačke P’ se ubacuje u kanonski oblik jednačine prave.

Prava p’’, koja je simetrična pravi p, se dobija kada se nađe simetrična tačka P’’. Vektor pravca prave p’’ je identična pošto su prave paralelne. = (l, m, n). Koordinate simetrične tačke P’’ se ubacuje u kanonski oblik jednačine prave.

Prava prodire ravnu π samo ako važi:

A ⋅ l + B ⋅ m + C ⋅ n != 0



Da bi smo odredili ortogonalnu projekciju prave p, tj. p’, trebamo ortogonalno projektovati proizvoljnu tačku P(x0, y0, z0) i naći prodornu tačku S koja pripada i pravi p’ i ravni π. (Proces ortogonalne projekcije tačke na ravan je opisano u prošlim pitanjima u skripti)

Da bi se našla simetrična prava p’’, moramo naći tačku P’ koja je simetrična tački P u odnosu na ravan. Pošto već imamo S, možemo da koristimo jednačinu prave kroz dve tačke da nađemo pravu p’’ u kanonskom obliku. U slučaju da su tačka P i tačka S identični, prelaskom na parametarski oblik se može generisati još jedna tačke prave da bi se primenila jednačina prave kroz dve tačke.

Creepy Copypasta 👀:

⊥

∡

3 2

π

⋅

°